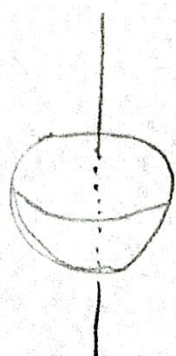


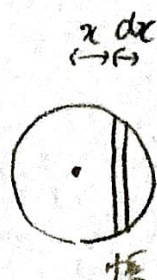
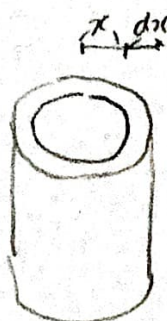
問

半径 a の中身のつまった球があり、
回転軸は球の直径を貫く
とき、慣性モーメント I を求めよ
ただし質量 m で質量分布は一定。

答



回転軸からの距離が
 $x \sim x+dx$ の部分を考える



$$\text{体積} = \underbrace{2\pi x}_{\text{幅}} \times \underbrace{2\sqrt{a^2 - x^2}}_{\text{高さ}}$$

$$\text{重さ} = \frac{\text{体積}}{\frac{4}{3}\pi a^3} \times m$$

$$= \frac{3m}{a^3} x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\text{よって } I = \int_0^a \underbrace{\frac{3m}{a^3} x \sqrt{a^2 - x^2} dx}_{\text{重さ}} \times \underbrace{x^2}_{\text{距離}^2}$$

$$x = a \sin t \text{ とおくと } dx = a \cos t dt \quad \begin{array}{l|l} x & 0 \rightarrow a \\ t & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$= 3ma^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t) dt \quad \text{積分}$$

$$= \frac{2}{5} ma^2$$