Hyperbolic and asymptotically constrained system in the Ashtekar formulation

米田元(早大理工), 真貝寿明(Penn State Univ.)

Abstract

• Einstein方程式の双曲化をAshtekar形式で.
3レベルの双曲化に必要なゲージ条件や実数条件

• 数値エラーを縮小させる方程式系の提案

Our papers

1. G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 263.
2. G. Yoneda and H. Shinkai, gr-qc/9901053, submitted.
3. H. Shinkai and G. Yoneda, Phys.Rev.D **60**(1999) 101502.

目次

§1. Introduction

双曲型運動方程式　複素変数 $u_\alpha (\alpha = 1, \cdots, n)$ に対する1階の quasi-linear system

$$\partial_t u_\alpha = J^{l\beta}{}_\alpha(u)\partial_l u_\beta + K_\alpha(u)$$

characteristic matrix J^l の性質で双曲型を分類

(I). J^l の固有値が全部実: **weakly hyperbolic**

(II). J^l が実対角化可能: **diagonalizable hyp.**

(III). J^l がエルミート行列: **symmetric hyp.**

(III)∈(II)∈(I)

利点

- weakly hyp. ならcharacteristic curveが構成可
- diag. hyp. なら初期値問題の適切性にも有効
- sym. hyp. なら初期値境界問題にも有効
- 数値計算上の利点

適用例　● 流体力学

● Einstein eq. の運動方程式を双曲化

Bona-Masso, ChoquetBruhat-York-Anderson, Frittelli-Reula, Friedrich, ...

Ashtekar形式

A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986).

- 四脚場 $\tilde{\boldsymbol{E}}^i_a$ と connection$\boldsymbol{\mathcal{A}}^a_i$ を使う正準形式
- constraintが polynomial
- 縮退点の扱いに有利

Ashtekarで双曲化

- 既に1階の弱双曲型
- Iriondo et al. Phys. Rev. Lett. **79**, 4732 (1997).
- 3レベルで必要なゲージ条件，実数条件

数値エラーを縮小するシステムへ応用

- Detweiler, Phys. Rev. **D35**, 1095 (1987).
- Brodbeck et al. J. Math. Phys. **40** (1999) 909.
- Ashtekarではconstraintと実数条件の破れを縮小させる

§2. Ashtekar's formulation

基本変数

- $\tilde{E}^i_a$: tetradを3+1分解したtriadにweight +1
- $\mathcal{A}^a_i$: Ricci connectionをchiral分解したもの
  ($i = x, y, z$ spatial index),
  ($a = (1), (2), (3)$, SO(3) index),
- gauge function ($\underset{\sim}{N}$, N^i, $\mathcal{A}^a_0$)

Einstein方程式

- **Constraint**

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_H &= \frac{i}{2}\epsilon^{ab}{}_c \tilde{E}^i_a \tilde{E}^j_b F^c_{ij} \approx 0, \\
\mathcal{C}_{Mi} &= -F^a_{ij}\tilde{E}^j_a \approx 0, \\
\mathcal{C}_{Ga} &= \mathcal{D}_i \tilde{E}^i_a \approx 0,
\end{aligned}
$$

where $\quad F^a_{ij} := \partial_i \mathcal{A}^a_j - \partial_j \mathcal{A}^a_i - i\epsilon^a{}_{bc}\mathcal{A}^b_i \mathcal{A}^c_j$

- **Equations of motion**

$$
\begin{aligned}
\partial_t \tilde{E}^i_a &= -i\mathcal{D}_j(\epsilon^{cb}{}_a \underset{\sim}{N} \tilde{E}^j_c \tilde{E}^i_b) + 2\mathcal{D}_j(N^{[j}\tilde{E}^{i]}_a) \\
&\quad + i\mathcal{A}^b_0 \epsilon_{ab}{}^c \tilde{E}^i_c, \\
\partial_t \mathcal{A}^a_i &= -i\epsilon^{ab}{}_c \underset{\sim}{N} \tilde{E}^j_b F^c_{ij} + N^j F^a_{ji} + \mathcal{D}_i \mathcal{A}^a_0
\end{aligned}
$$

実数条件

- **metric reality**:
  (primary condition) $\mathrm{Im}(\tilde{E}^i_a \tilde{E}^j_a) = 0$
  (secondary condition)
  $W^{ij} := \mathrm{Re}(\epsilon^{abc} \tilde{E}^k_a \tilde{E}^{(i}_b \mathcal{D}_k \tilde{E}^{j)}_c) = 0$
- **triad reality**:
  (primary condition) $\mathrm{Im}(\tilde{E}^i_a) = 0$
  (secondary condition) $W^{ij} = 0$ and
  $\mathrm{Re}(\mathcal{A}^a_0) = \partial_i(\underset{\sim}{N})\tilde{E}^{ia} + \frac{1}{2} e^{-1} e^b_i \underset{\sim}{N} \tilde{E}^{ja} \partial_j \tilde{E}^i_b + N^i \mathrm{Re}(\mathcal{A}^a_i)$

利点・特徴

1. constraintが簡単に
2. 縮退点の扱い可
3. 変数が複素に拡張されている
4. ゲージ場を含めた取り扱いに適
5. tetradをとっているため，内部自由度が増加
6. weakly hyp.

$$\partial_t \begin{pmatrix} \tilde{E}^i_a \\ \mathcal{A}^a_i \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \begin{array}{c} -i\underset{\sim}{N}(\epsilon_a{}^{bc}\tilde{E}^i_c \delta^l_j - \epsilon_a{}^{bc}\tilde{E}^l_c \gamma^i_j) \\ +N^l \delta^b_a \gamma^i_j - N^i \delta^b_a \gamma^l_j \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{c} +i\underset{\sim}{N}(\epsilon^a{}_b{}^c \tilde{E}^j_c \gamma^l_i - \epsilon^a{}_b{}^c \tilde{E}^l_c \gamma^j_i) \\ +N^l \delta^a_b \gamma^j_i - N^j \delta^a_b \gamma^l_i \end{array} \end{pmatrix} \partial_l \begin{pmatrix} \tilde{E}^j_b \\ \mathcal{A}^b_j \end{pmatrix}$$

§3. Constructing Hyperbolic systems

Ashtekarで双曲型(weakly, diagonalizable, symmetric)を作る。必要となる実数条件, ゲージ条件, constraintによる運動方程式の補正を調べる。固有値も調べる。

<u>**metric realityを課す**</u>

- (Ia) そのままでweakly hyp.
  固有値 $= \{0\ (6), N^l\ (4), N^l \pm N\sqrt{\gamma^{ll}}\ (4\ \text{each})\}$
- (IIa) diagonalizableになる必要十分条件は
  $N^l \neq 0$ nor $\pm N\sqrt{\gamma^{ll}}$, and $\gamma^{ll} > 0$
  固有値は(Ia)と同じ

<u>**triad realityを課す**</u>

- (Ib) triad realityのsecondary condition:
  $\mathrm{Re}(\mathcal{A}^a_0) = \partial_i(\underset{\sim}{N})\tilde{E}^{ia} + \frac{1}{2}e^{-1}e^b_i \underset{\sim}{N}\tilde{E}^{ja}(\partial_j \tilde{E}^i_b)$
  $+N^i \mathrm{Re}(\mathcal{A}^a_i) = (\partial_i N)E^{ia} + N^i \mathrm{Re}(\mathcal{A}^a_i)$
  により2階に
  $\partial_i N = 0, \mathcal{A}^a_0 = \mathcal{A}^a_i N^i$ と仮定してweakly hyp.
  (注) triad realityを継続的に課すと，このゲージ条件が必要
  固有値 $= \{0\ (3),\ N^l\ (7),\ N^l \pm N\sqrt{\gamma^{ll}}\ (4\ \text{each})\}$

運動方程式の右辺をconstraintで補正

- (IIIa) symmetric hyp.を目指すとtriad realityが必要 (ex. エルミート性:$\tilde{E}^i_a - \bar{\tilde{E}}^i_a = 0$) $\partial_i N = 0$, $\mathcal{A}^a_0 = \mathcal{A}^a_i N^i$を仮定 (Iriondo et al.との違い) constraintの補正係数が**一意的**に求められる
  補正 term to $\partial_t \tilde{E}^i_a = (N^i \delta_{ab} + i \underset{\sim}{N} \epsilon_{ab}{}^c \tilde{E}^i_c)\mathcal{C}^b_G$
  補正 term to $\partial_t \mathcal{A}^a_i = e^{-2} \underset{\sim}{N} \tilde{E}^a_i \mathcal{C}_H - i e^{-2} \underset{\sim}{N} \epsilon^{abc} \tilde{E}_{bi} \tilde{E}^j_c \mathcal{C}_{Mj}$
  固有値$=\{N^l$ (6), $N^l \pm \sqrt{\gamma^{ll}} N$ (5 each), $N^l \pm 3\sqrt{\gamma^{ll}} N$ (1 each)$\}$
- (IIb) 上と同じ補正で，metric realityを課すと diagonalizable hyp. 固有値も上と同じ

hyperbolic system	Eqs of motion	reality condition	gauge conditions required
Ia	original	metric	-
Ib	original	triad	$\mathcal{A}^a_0 = \mathcal{A}^a_i N^i$, $\partial_i N = 0$
IIa	original	metric	$N^l \neq 0, \pm N\sqrt{\gamma^{ll}}$ ($\gamma^{ll} \neq 0$)
IIb	modified	metric	$\mathcal{A}^a_0 = \mathcal{A}^a_i N^i$
$IIIa$	modified	triad	$\mathcal{A}^a_0 = \mathcal{A}^a_i N^i$, $\partial_i N = 0$

hyperbolicのレベルを上げると，要求されるゲージ条件も厳しくなっていく

§4. Asymptotically constrained and real-valued system

動機づけ Brodbeckらのconstraintの破れを制御する発展システム

これをAshtekar版でやってみよう

constraintだけでなく実数条件の破れも縮小

前章で得られたsym. hyp.を基にして構成

system構築の概要(Brodbeck et al.)

1. dynamical変数のsymmetric hyp.を用意
   $$\partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{K}$$
2. constraint $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{u}) \approx \boldsymbol{0}$の発展をconstraintで書く
   $$\partial_t \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}' + \boldsymbol{E}\boldsymbol{C}$$
3. 変数$\boldsymbol{\lambda}$を導入:初期値は$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{0}$で発展は
   $$\partial_t \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\lambda}\ (\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta} > \boldsymbol{0})$$
4. 変数系$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda})$の発展
   $$\partial_t \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}' + \boldsymbol{K} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$$
5. ここで$\partial_t \boldsymbol{u}$に$\boldsymbol{\lambda}'$の補正を行いsym. hyp. $\boldsymbol{\lambda}$-system
   $$\partial_t \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J} & {}^t\bar{\boldsymbol{F}} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}' + \boldsymbol{K} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$$

asymptotic constrainedになる要領

$\boldsymbol{\lambda}$と$\boldsymbol{C}$で発展systemを組む

1. constraintの発展も補正されている
   $$\partial_t C = DC' + EC + G\lambda'' + H\lambda'$$
2. フーリエ変換
   $$\lambda(x,t) = \int \hat{\lambda}(k,t)\exp(ik\cdot x)d^3k$$
   $$C(x,t) = \int \hat{C}(k,t)\exp(ik\cdot x)d^3k$$
3. $$\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -Gkk + iHk & iDk + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{C} \end{pmatrix}$$
   線形化して，右辺の行列を定数化
   この定数行列の固有値が実部が負$(-\Lambda)$ になるようにα,βを選べば，変数系$(\hat{\lambda}, \hat{C})$はasymptoticに$\exp(-\Lambda t)$として振る舞う

Ashtekar版を作る

- 前章で得られたsym.hyp.を基にする
- 実数条件(primary, secondary)もconstraint と同様に扱い，実数条件の破れも制御可能に
- Ashtekar変数を使った古典的応用に一歩前進

§5. Discussion

constructing hyperbolic systems

出来たこと

3つのlevelの双曲型を作り，ゲージ条件，実数条件，constraint補正を調べた

課題

特に有用なsymmetric hyp.ではゲージ条件が強いので，なんとかして弱められないか

(Ashtekarに限らず) どのレベルのhyperbolicで実際にどんな効用があるのか，数値シミュレーション (Alcubierre et al. gr-qc/9908079)

asymptotic constrained system

出来たこと

Ashtekar版の$\boldsymbol{\lambda}$-system構築（実数条件も制御）

Ashtekar変数を使った古典的応用に一歩前進

課題

完全な形で$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$の条件を解く

変数が多い

有効性を示すシミュレーション

Experiments of λ-system using Linearized equations

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}^i_a &= \delta^i_a + {}^{(1)}\tilde{E}^i_a + {}^{(2)}\tilde{E}^i_a + \cdots \\
\mathcal{A}^a_i &= 0 + {}^{(1)}\mathcal{A}^a_i + {}^{(2)}\mathcal{A}^a_i + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^a_{ij} &= \partial_i \mathcal{A}^a_j - \partial_j \mathcal{A}^a_i - i\epsilon^a{}_{bc}\mathcal{A}^b_i \mathcal{A}^c_j \\
&\simeq \underbrace{\partial_i({}^{(1)}\mathcal{A}^a_j) - \partial_j({}^{(1)}\mathcal{A}^a_i)}_{(1)} \underbrace{+\partial_i({}^{(2)}\mathcal{A}^a_j) - \partial_j({}^{(2)}\mathcal{A}^a_i) - i\epsilon^a{}_{bc}({}^{(1)}\mathcal{A}^b_i)({}^{(1)}\mathcal{A}^c_j)}_{(2)} + \cdots
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{controlling } \mathcal{C}_H \text{ and } \mathcal{C}_M}$

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathcal{C}_H &= -\partial_j \tilde{\mathcal{C}}_{Mj} + \bar{\alpha}_1(\partial_j \partial_j \lambda) \\
\partial_t \tilde{\mathcal{C}}_{Mi} &= -\partial_i \mathcal{C}_H + i\epsilon_i{}^{jk}\partial_j \tilde{\mathcal{C}}_{Mk} + \bar{\alpha}_2(\partial_i \partial_j \lambda_j) + \bar{\alpha}_2(\partial_j \partial_j \lambda_i) \\
\partial_t \lambda &= \alpha_1 \mathcal{C}_H - \beta_1 \lambda, \\
\partial_t \lambda_i &= \alpha_2 \tilde{\mathcal{C}}_{Mi} - \beta_2 \lambda_i,
\end{aligned}
$$

In the Fourier space,

$$
\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\lambda}_i \\ \hat{\mathcal{C}}_H \\ \hat{\tilde{\mathcal{C}}}_{Mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \delta^j_i & 0 & \alpha_2 \delta^j_i \\ -\bar{\alpha}_1 k_m k^m & 0 & 0 & -ik^j \\ 0 & -\bar{\alpha}_2 k_i k^j - \bar{\alpha}_2 k_m k^m \delta^j_i & -ik_i & -\epsilon_i{}^{mj} k_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\lambda}_j \\ \hat{\mathcal{C}}_H \\ \hat{\tilde{\mathcal{C}}}_{Mj} \end{pmatrix}
$$

Characteristic equations are (if $k_2 = k_3 = 0$)

$$
\begin{aligned}
0 &= x^4 + 2\beta_2 x^3 + (2\bar{\alpha}_2 k_1^2 \alpha_2 + k_1^2 + \beta_2^2)x^2 + (2\beta_2 \bar{\alpha}_2 k_1^2\, \alpha_2 + 2\,\beta_2\, k_1^2)\, x + \bar{\alpha}_2{}^2\, k_1^4\, \alpha_2^2 + \beta_2^2\, k_1^2 \\
0 &= x^4 + (\beta_1 + \beta_2)\, x^3 + (2\, \bar{\alpha}_2\, k_1^2\, \alpha_2 + k_1^2 + \bar{\alpha}_1\, k_1^2\, \alpha_1 + \beta_1\, \beta_2)\, x^2 \\
&\quad + (2\, \beta_1\, \bar{\alpha}_2\, k_1^2\, \alpha_2 + \beta_2\, k_1^2 + \bar{\alpha}_1\, k_1^2\, \beta_2\, \alpha_1 + \beta_1\, k_1^2)\, x + 2\, \bar{\alpha}_1\, k_1^4\, \alpha_1\, \bar{\alpha}_2\, \alpha_2 + \beta_1\, b_2\, k_1^2
\end{aligned}
$$

- Eigenvalues becomes negative (real-part) if $\beta_2 > 0$ in the former eq.

$$
\text{exact sols} = \frac{1}{2}[-\beta_2 - ik_1 \pm \sqrt{-k_1^2 - 4\alpha_2^2 k_1^2 + \beta_2^2 - 2ik_1\beta_2}],
$$

- Eigenvalues can be negative (real-part) by a certain choice of α_i, β_i.

$\boxed{\text{controlling } \mathcal{C}_H,\ \mathcal{C}_M,\ \mathcal{C}_G \text{ and reality conditions}}$

Under investigation.