14pRB-13　安定な数値シミュレーションを行うためのEinstein方程式の定式化 II

早稲田数理科学，理研計算科学[A]　米田元，真貝寿明[A]
Formulation of Einstein equations for stable numerical simulations II
Dept. Mathematical Science, Waseda U.　Comptational Science Div., RIKEN [A]
Gen Yoneda and Hisaaki Shinkai [A]

一般相対性理論に基づいて重力波発生の数値シミュレーションを行うプロジェクトが世界各地で精力的に進んでいる．時空の時間発展を考える標準的な手段は，Arnowitt-Deser-Misner(ADM)によって導出された，時空を空間(3次元)と時間(1次元)に分解する「3+1分解」である．最近，Einstein方程式の定式化の違いで，数学的には等価であっても，数値的な安定性が変わることが確かな事実として認識されてきた．我々は，現在までに行われている試行錯誤的な事例を統一的に理解する方法を提案し，安定で精度の良い数値計算を行え得るだろう定式化を提案する．今回は，より進んだ提案と計算実例を紹介したい．

これまでに試みられている方法は大きく3つに大別できる．(1) 日本の数値相対論グループが開発した，ADM変数を共形分解し，さらにRicci曲率の計算に新変数を導入するなどの工夫を行う方法（いわゆるBaumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura, BSSN方式）．(2) 運動方程式が陽に双曲型発展方程式になるように，変数を工夫したり，拘束条件式を加えるなどの改良を行う方法．(3) 拘束条件式の破れが自己回復するような新たなシステムを構築する方法．(1)-(3)すべてに共通する工夫は，運動方程式の右辺に，本来ゼロであるべき拘束条件式を加えていることである．

我々は，数値計算の安定性を議論する際に，時間発展を通じて満たされるべき拘束条件式（の破れ）の発展方程式に注目した．運動方程式の右辺に拘束条件式を加える(adjust)操作によって，拘束条件式に発生する破れの発展具合も変化する．破れがあっても，それが有限に留まるか，ゼロになるように発展できるなら，システムは安定な発展を行うと考えられる．我々は，数値発展に安定なシステムを得る指標として，次の仮説（十分条件）を立てた．

仮説： 拘束条件の発展方程式をフーリエ展開・球面調和関数展開などにより常微分方程式化し，その固有値を計算する．固有値の (a)「実部が負」あるいは (b)「虚数部分をもつ」ならば，元の発展方程式はより安定である．

すでに，この仮説が有効であることは，Maxwell方程式の時間発展比較やAshtekar変数を用いた双曲型運動方程式の時間発展比較 に於いて示した[0]．そして前回，ADM形式でもこのアイデアが応用できること を示した[1, 2]．今回は，この提案について，実際に数値計算を行った比較(空間1次元/3次元)を報告する．

また，BSSN形式に対しても，同様の解析を行った．なぜADM形式より優れているのか，というPotsdamグループの数値実験結果に解析的な説明を与えることに成功し，また，現在のBSSN方程式よりもより安定と思われる運動方程式補正の新たな提案を行った[3]．現在，これらの数値発展計算を行っている．

数値的により安定な発展方程式が，単に拘束条件式を使ってadjustすることで得られる，というアイデアは魅力的である．この統一的な理解は，現在，adjustする際の乗数パラメータの決定プロセスをどう汎用化するか，という段階にある．

[0] H. Shinkai and G. Yoneda, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 4799, G. Yoneda and H. Shinkai, Class. Quant. Grav. **18** (2001) 441
[1] G. Yoneda and H. Shinkai, Phys. Rev. **D 63** (2001) 120419
[2] H. Shinkai and G. Yoneda, Classical and Quantum Gravity 19 (2002) 1027.
[3] G. Yoneda and H. Shinkai, submitted to Physical Review D. gr-qc/0204002.