

安定な数値シミュレーションを行うためのEinstein方程式の定式化 II

米田元（早大理工）， 真貝寿明（理研）

Introduction

- 数値相対論において，ADMに代わる発展方程式の模索，安定で長時間シミュレーションできる定式化
- 様々な試み：双曲型発展方程式，BSSN，発展方程式の補正，漸近的拘束型
- **指標**の提案：**C**onstraint **A**mplification **F**actor
拘束条件の発展方程式を固有値解析
- CAFで評価，ADM，ADM-adjusted，BSSN，BSSN-adjusted
実際に数値計算で効果があるか？

Refs:

Hyperbolic	PRL 82 (1999) 263, PRD 60 (1999) 101502, JMPD 9 (2000) 13,
Adjusted system	CQG 17 (2000) 4799, CQG 18 (2001) 441
ADM-adjusted	PRD 63 (2001) 120419, CQG 19 (2002) 1027
BSSN-adjusted	gr-qc/0204002

Constraint Amplification Factors

formulation (発展方程式, constraint) + background metric $\longrightarrow$ CAF

発展方程式

$$\partial_t u = f(u, u', u'', \dots)$$

束縛条件

$$\vec{C} = \vec{C}(u, u', u'', \dots)$$

束縛条件の時間微分

$$\partial_t \vec{C} = A \vec{C}' + B \vec{C}$$

常微分化

$$\partial_t \vec{\hat{C}} = (ikA + B) \vec{\hat{C}} \quad (\text{ex. Fourier trans.})$$

背景を代入

$$(ikA + B) / \{g \rightarrow g_0\}$$

固有値を求める

$$\text{CAF} = \text{Spec}((ikA + B) / \{g \rightarrow g_0\})$$

CAFの意味

$$\partial_t C = \lambda C \rightarrow C = C_0 \exp(\lambda t) = C_0 \exp(at + ibt) = C_0 \exp(at) \exp(ibt)$$

実部 α は負がdecay mode . 0は普通 . 正はgrow mode.

虚部 b は振動モード . ゼロより non-zero が良い .

example ADM形式 + 平坦背景のCAF

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i$$

$$\partial_t K_{ij} = \alpha R_{ij} + \alpha K K_{ij} - 2\alpha K_{ik} K_{kj} - D_i D_j \alpha + (D_i \beta^k) K_{kj} + (D_j \beta^k) K_{ki} + \beta^k D_k K_{ij}$$

$$\mathcal{H} = R + K^2 - K_{ij} K^{ij}$$

$$\mathcal{M}_i = D_j K^j_i - D_i K$$

$$\partial_t \mathcal{H} = \beta^j (\partial_j \mathcal{H}) + 2\alpha K \mathcal{H} - 2\alpha \gamma^{ij} (\partial_i \mathcal{M}_j) + \alpha (\partial_l \gamma_{mk}) (2\gamma^{ml} \gamma^{kj} - \gamma^{mk} \gamma^{lj}) \mathcal{M}_j - 4\gamma^{ij} (\partial_j \alpha) \mathcal{M}_i$$

$$\partial_t \mathcal{M}_i = -(1/2)\alpha (\partial_i \mathcal{H}) - (\partial_i \alpha) \mathcal{H} + \beta^j (\partial_j \mathcal{M}_i) + \alpha K \mathcal{M}_i - \beta^k \gamma^{jl} (\partial_i \gamma_{lk}) \mathcal{M}_j + (\partial_i \beta_k) \gamma^{kj} \mathcal{M}_j$$

$$\text{CAF} = (0, 0, \pm \sqrt{-|\vec{k}|^2})$$

Adjusted system

発展方程式の補正

束縛条件の時間微分も変わる

常微分化

背景代入，固有値

CAFが良くなるように補正係数 κ を調整する

example ADM-adjusted

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i + \kappa \alpha \mathcal{H}(\text{adjusted term})$$

$$\text{CAF} = (0, 0, \kappa |\vec{k}|^2 \pm \sqrt{|\vec{k}|^2(-1 + \kappa^2 |\vec{k}|^2)}) \quad \text{適当に小さい負の}\kappa\text{ならCAF実部が負に}$$

その他，いろいろなタイプの補正．球対称時空における球面調和関数展開を利用したCAFの算出．
Maximal slicingで発展した後の数値的なCAFの算出．

$$\partial_t u = f(u, u', u'', \dots) + \kappa F(C, C', \dots)$$

$$\partial_t \vec{C} = A \vec{C}' + B \vec{C} + \kappa D \vec{C}' + \kappa E \vec{C}$$

$$\partial_t \vec{\tilde{C}} = (ikA + B + ik\kappa D + \kappa E) \vec{\tilde{C}}$$

$$\text{CAF} = \text{Spec}((ikA + B + ik\kappa D + \kappa E) / \cdot \{g \rightarrow g_0\})$$

Comparisons of Adjusted ADM systems (linear wave)

Mexico NR 2002 Workshop participants

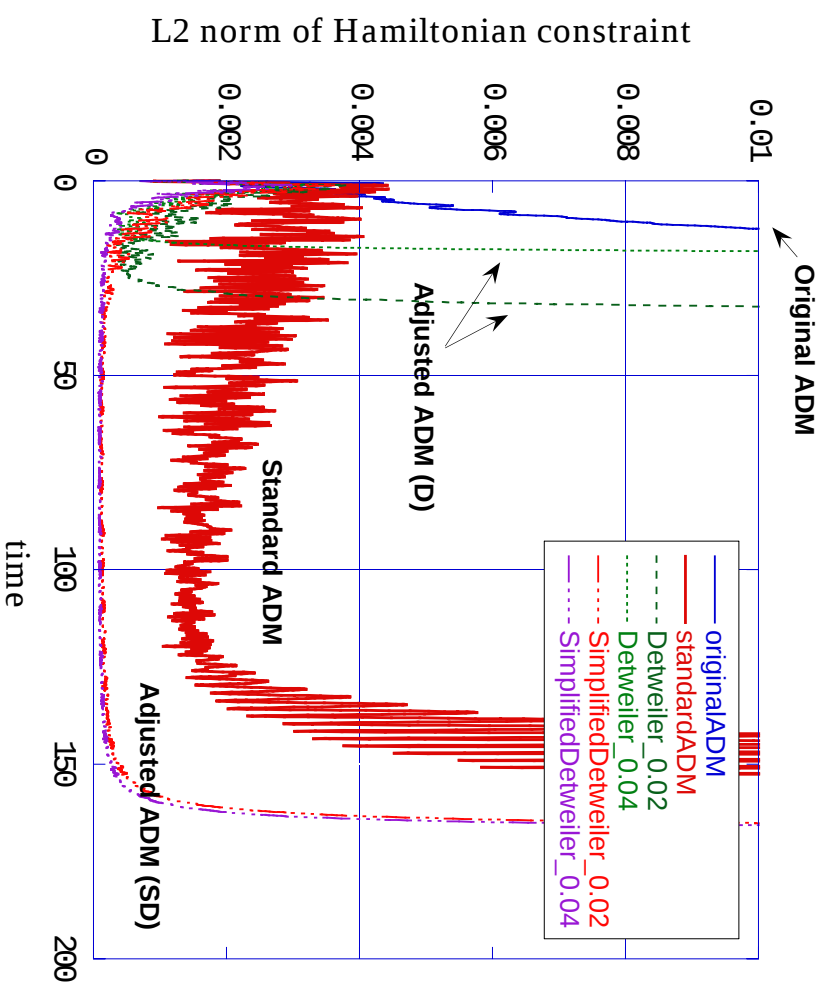


Figure 1: Violation of Hamiltonian constraints versus time: Adjusted ADM systems applied for Teukolsky wave initial data evolution with harmonic slicing, and with periodic boundary condition. Cactus/CactusEinstein/ADM code was used. Grid = 24^3 , $\Delta x = 0.25$, iterative Crank-Nicholson method.

Example 2: BSSN and BSSN-adjusted

ダイナミカル変数 $(\varphi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$, constraint $(\mathcal{H}, \mathcal{M}_i, \mathcal{G}^i, \mathcal{S}, \mathcal{A})$

$$\mathcal{H} = R^{BSSN} + K^2 - K_{ij}K^{ij}, \quad \mathcal{M}_i = D_j K^j_i - D_i K,$$

$$\mathcal{G}^i = \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^i_{jk} \tilde{\gamma}^{jk}, \quad \mathcal{S} = \det(\tilde{\gamma}_{ij}) - 1, \quad \mathcal{A} = \tilde{A}_{ij} \tilde{\gamma}^{ij}$$

$$\partial_t^B \varphi = -(1/6)\alpha K + (1/6)\beta^i(\partial_i \varphi) + (\partial_i \beta^i),$$

$$\partial_t^B \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik}(\partial_j \beta^k) + \tilde{\gamma}_{jk}(\partial_i \beta^k) - (2/3)\tilde{\gamma}_{ij}(\partial_k \beta^k) + \beta^k(\partial_k \tilde{\gamma}_{ij}),$$

$$\partial_t^B K = -D^i D_i \alpha + \alpha \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + (1/3)\alpha K^2 + \beta^i(\partial_i K),$$

$$\partial_t^B \tilde{A}_{ij} = -e^{-4\varphi}(D_i D_j \alpha)^{TF} + e^{-4\varphi}\alpha(R^{BSSN}_{ij})^{TF} + \alpha K \tilde{A}_{ij} - 2\alpha \tilde{A}_{ik} \tilde{A}^k_j + (\partial_i \beta^k) \tilde{A}_{kj} + (\partial_j \beta^k) \tilde{A}_{ki}$$

$$- (2/3)(\partial_k \beta^k) \tilde{A}_{ij} + \beta^k(\partial_k \tilde{A}_{ij}),$$

$$\partial_t^B \tilde{\Gamma}^i = -2(\partial_j \alpha) \tilde{A}^{ij} + 2\alpha(\tilde{\Gamma}^i_{jk} \tilde{A}^{kj} - (2/3)\tilde{\gamma}^{ij}(\partial_j K) + 6\tilde{A}^{ij}(\partial_j \varphi)) - \partial_j(\beta^k(\partial_k \tilde{\gamma}^{ij}) - \tilde{\gamma}^{kj}(\partial_k \beta^i))$$

$$- \tilde{\gamma}^{ki}(\partial_k \beta^j) + (2/3)\tilde{\gamma}^{ij}(\partial_k \beta^k)).$$

$$\text{ADMの発展を使う} \quad \text{CAF} = (0(\times 7), \pm\sqrt{-k^2})$$

$$\text{BSSNの発展を使う} \quad \text{CAF} = (0(\times 3), \pm\sqrt{-k^2} \text{ (3 pairs)}) \quad \text{少しよくなった}$$

BSSN-adjusted

$$\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = \partial_t^B \tilde{\gamma}_{ij} + \kappa \alpha \tilde{\gamma}_{ij} \mathcal{H}$$

$$\text{CAF} = (0(\times 2), \pm\sqrt{-k^2} \text{ (3 pairs)}, (3/2)k^2 \kappa) \quad \kappa < 0 \text{ でさらによくなる}$$

Comparisons of Adjusted BSSN systems (linear wave)

Mexico NR 2002 Workshop participants

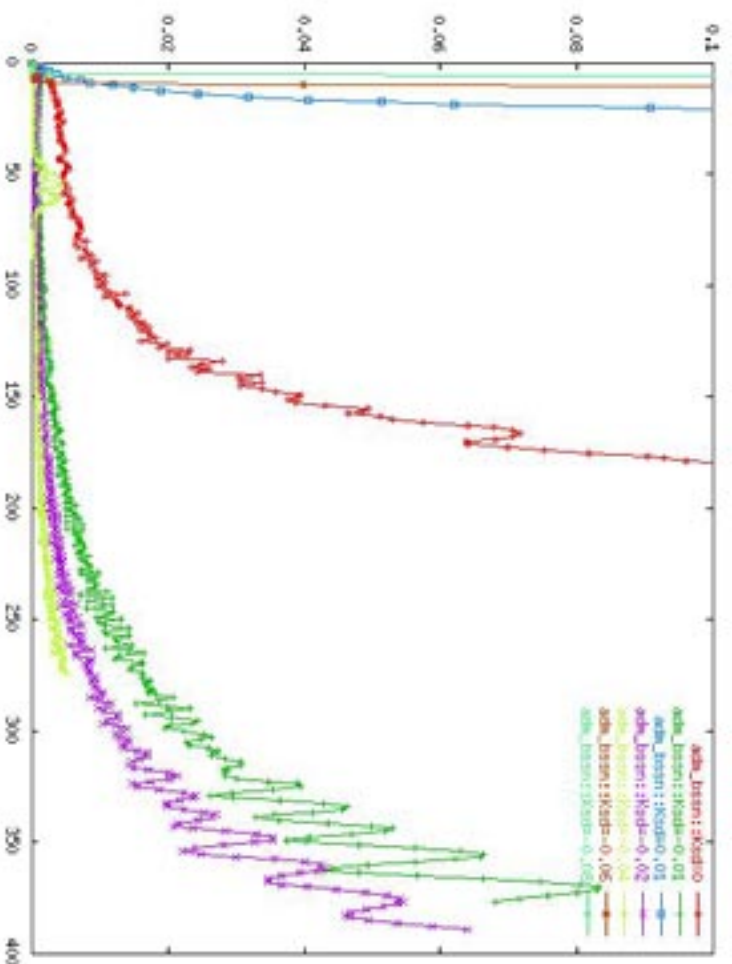


Figure 2: Violation of Hamiltonian constraints versus time: Adjusted BSSN systems applied for Teukolsky wave initial data evolution with harmonic slicing, and with periodic boundary condition. Cactus/AEITHorns/BSSN code was used. Grid = 24^3 , $\Delta x = 0.25$, iterative Crank-Nicholson method. Courtesy of N. Dorband and D. Pollney (AEI).

まとめ

- 指標”Constraint Amplification Factors”を提案．ADMやBSSN，各種背景に対しCAFを算出できるようにした．
- 補正してCAFを良くする試み（adjusted system）を提案．ADM-adjusted，BSSN-adjusted．数値的な効果もあった．

やりたいこと

- BSSN(adjusted)の球対称時空背景でのCAF，KST(adjusted)のCAF
- 補正をもっと綺麗に導出できないか？
- 背景に対しての2次のオーダーでは評価できないか？
- CAF，そのほかの数値的な安定性の数学的な背景を強化する
- 他によい指標はないだろうか？