Einstein 方程式における constraint の安定性

米田元 (早大理工数理)

目的　Einstein 方程式を時間 1 次元・空間 3 次元に分割したときに出来る時間一定面上の制約（constraint）の安定性について考える。つまりこの constraint の破れが，Einstein 方程式の残りの発展方程式によって，時間的に成長するか収縮するか調べる。

動機　Einstein 方程式を数値的に解くには，まず初期面 $(t=0)$ において constraint を解き，次の面 $(t=dt)$，次の面 $(t=2dt)$ へ発展方程式を使って時間発展させていく。このとき初期 $(t=0)$ に解かれた constraint は保存される。これは解析的には正しいが，数値的に解く場合 constraint の破れがエラーとして発生する。発展方程式は毎回課すので，破れの心配をする必要はあまりないが，constraint の破れは積算するので破れは重要なエラーとなって，結果の正しさに影響する。だから constraint は安定している，つまり破れが収縮に向かう方が望ましい。

方法　constraint の L2 ノルムの時間微分の符号を調べるのが，最も直感的な方法である。非線形問題のため時間微分は変数を含んでおり，符号を判定するのは一般に困難である。また Einstein 方程式は線形化すると波動方程式であり，constraint も波のように増減するので，時間微分が負つまり単調減少することは難しい。

　そこで constraint をベクトルとして扱い，その時間微分の係数行列に着目する。constraint C の時間微分を $\partial_t C = A^i \partial_i C + BC$ として，これをフーリエ変換によっ

て，$\partial_t \hat{C} = (ik_i A^i + B)\hat{C}$ と変形し，この係数行列に，ベースとなる厳密解（背景という）を代入する。（球対称時空の場合には，球面調和関数展開する。）その行列の固有値の実部が負であれば漸近的な安定性が調べられる。

工夫　発展方程式を constraint で補正することによって，上の固有値を操作できる。安定化につながる補正を調べ，それを利用して数値的に解くことによって，constraint の破れが抑えられる。ここでは，背景として Minkowskii 時空，Schwarzchild 時空を採用した解析の例を上げる。

References

[1] G.Yoneda and H.Shinkai, Symmetric hyperbolic system in the Ashtekar formulation, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 263.

[2] G.Yoneda and H.Shinkai, Constructing hyperbolic systems in the Ashtekar formulation of general relativity, Int. J. Mod. Phys. D, Vol. 9, No. 1 (2000) 13-34.

[3] H.Shinkai and G.Yoneda, Asymptotically constrained and real-valued system based on Ashtekar's variables, Phys.Rev.D Vol.60(1999) 101502.

[4] H.Shinkai and G.Yoneda, Hyperbolic formulations and numerical relativity: Experiments using Ashtekar's connection variables,

[5] G.Yoneda and H.Shinkai, Hyperbolic formulations and numerical relativity II: Asymptotically constrained system of the Einstein equation, Classical and Quantum Gravity, Vol.18(2001), pp.441-462.

[6] G.Yoneda and H.Shinkai, Constraint propagation in the family of ADM systems, Physical Review D, Vol.63(2001), 124019.

[7] H.Shinkai and G.Yoneda, Adjusted ADM systems and their expected stability properties, gr-qc/0110008.