

Einstein 方程式における constraint の安定性

米田 元 (早大理工数理)

<http://faculty.web.waseda.ac.jp/yoneda>

- Class.Quant.Grav.18(2001), 441.
- Physical Review D, **63**(2001), 124019.
- Class.Quant.Grav. **19** (2002), 1027.

with H.SHINKAI (理研)

Introduction

- Einstein 方程式 $Ric_{\mu\nu} = 0$ (真空)
- constraint とは？
Einstein 方程式を時空分解
→ constraint + 発展方程式
- constraint が安定とは？
constraint の破れが発展方程式
によって増大しないこと
- 安定性に注目する動機は？
発展方程式は毎ステップ課すため
に差分誤差だけだが, constraint
の誤差は積算されていくから
- 数値相対論の方法
 1. 初期面で constraint を解く
 2. それを発展方程式で発展させる
 3. constraint の成立は保存

constraint の安定性

- Einstein 方程式

$$\mathcal{H} := R^{(3)} + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0$$

$$\mathcal{M}_i := \nabla_j K^j_i - \nabla_i K = 0$$

$$(\partial/\partial t)\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i\beta_j + \nabla_j\beta_i$$

$$(\partial/\partial t)K_{ij} = \alpha R^{(3)}_{ij} + \alpha K K_{ij} - 2\alpha K_{ik}K^k_j - \nabla_i\nabla_j\alpha + (\nabla_i\beta^k)K_{kj} + (\nabla_j\beta^k)K_{ki} + \beta^k\nabla_k K_{ij}$$

- constraint propagation

$$(\partial/\partial t)\mathcal{H} = \beta^j(\partial_j\mathcal{H}) - 2\alpha\gamma^{ji}(\partial_i\mathcal{M}_j) + 2\alpha K\mathcal{H}$$

$$+ \alpha(\partial_l\gamma_{mn})(2\gamma^{ml}\gamma^{nj} - \gamma^{mn}\gamma^{lj})\mathcal{M}_j - 4\gamma^{im}(\partial_m\alpha)\mathcal{M}_i$$

$$(\partial/\partial t)\mathcal{M}_i = -(1/2)\alpha(\partial_i\mathcal{H}) + \beta^j(\partial_j\mathcal{M}_i) + \alpha K\mathcal{M}_i$$

$$- (\partial_i\alpha)\mathcal{H} - \beta^k(e^{-4\varphi}\tilde{\gamma}^{jm})\partial_i(e^{4\varphi}\tilde{\gamma}_{mk})\mathcal{M}_j$$

$$+ (\partial_i\beta_m)(e^{-4\varphi}\tilde{\gamma}^{mj})\mathcal{M}_j$$

- ノルムの時間微分の符号は？

$$\text{ノルム} := \mathcal{H}^2 + \mathcal{M}_i\mathcal{M}^i$$

$$(\partial/\partial t)\text{ノルム} := ***\mathcal{H} + ***\mathcal{M}_i + \dots$$

符号は全く不明

ODE 化して係数行列の固有値 (AF)

- 行列で考える

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{M}_i \end{pmatrix}$$

- ODE 化する. 例えばフーリエ変換

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{M}}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{H}} \\ \hat{\mathcal{M}}_i \end{pmatrix}$$

- 係数に背景を代入して固有値を

$$\text{AmpFactor} := \text{Spec} \begin{pmatrix} \#_0 & \#_0 \\ \#_0 & \#_0 \end{pmatrix}$$

- AmpFactor の意味: $C = \text{Exp}(AF * t)$

- ゼロのとき: 一定
- 純虚のとき: 振動
- 実部が正のとき: 増幅振動
- 実部が負のとき: 減衰振動

- (例) Minkowskii 背景でフーリエ変換

$$AF = (0, 0, \pm \sqrt{-|\vec{k}|^2})$$

発展方程式を補正

- 発展方程式の右辺を constraint を使って修正 例えば

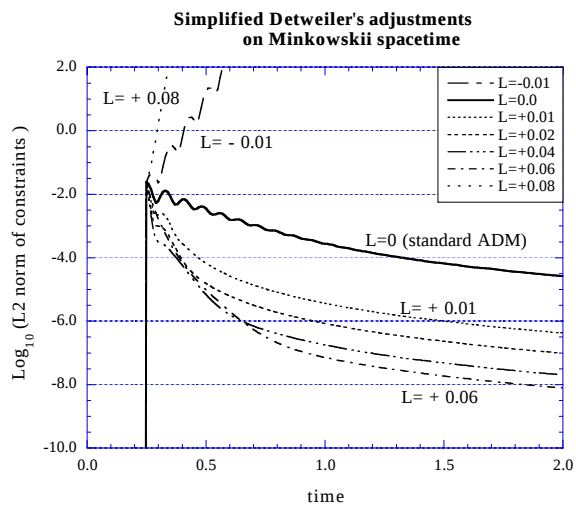
$$(\partial/\partial t)\gamma_{ij} = \text{original term} - \alpha L \gamma_{ij} \mathcal{H}$$

- AmpFactor は変化する

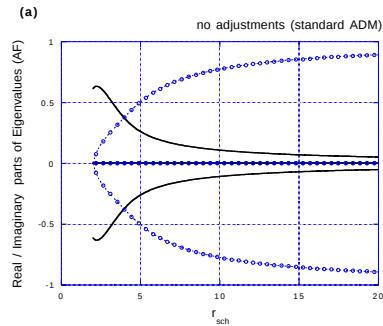
$$\text{AF} = (0, 0, -L|\vec{k}|^2 \pm \sqrt{|\vec{k}|^2(-1 - L|\vec{k}|^2)})$$

負になるように L を調整

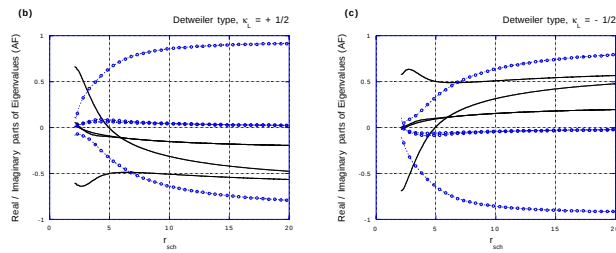
- 適用例 1 の数値計算結果 (平面波)



- 適用例 2(球対称時空)
フーリエ展開の代わりに球面調和関数展開 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ を使う
- 背景を Schwartzchild にした場合



- それに補正をしたら



- その数値計算例 → 作成中

まとめ

できたこと

1. Einstein 方程式における constraint の安定性を調べるのに都合の良い指標を提示した
2. いろいろな背景で, いろいろな補正を試して, より安定なシステムを提示した
3. 数値計算で安定性を実証した

これからしたいこと

1. 数値計算実証の充実
2. その他の背景での ODE 化の処方箋
3. どのような補正が良いか, 試行錯誤ではない探し方はないか?
4. ADM 以外の formulation への適用