Constraint propagation of the Einstein equations

米田元(早大理工数理)
http://faculty.web.waseda.ac.jp/yoneda
真貝寿明 (**Penn.State Univ** → 理研)
http://atlas.riken.go.jp/~shinkai/

目的　数値相対論への応用において，安定な時間発展をもたらすEinstein方程式の定式化を探る.

概要　constraintの時間発展方程式(constraint propagation) を導き，その双曲性解析と固有値解析及び、フーリエ変換後の固有値(amplification factor)を求める。運動方程式の右辺をconstraintでadjustしながら、amplification factorが負になるようにすれば、asymptotically constrainedなsystemができるのではないか？
Constraint propagation in the family of ADM systems, gr-qc/0103032, submitted to PRD

Einstein eq. の hyperbolic reduction

双曲型運動方程式

$$\partial_t u_\alpha = J^{l\beta}{}_\alpha(u)\partial_l u_\beta + K_\alpha(u)$$

(1) J^l の固有値が全部実: **weakly hyp.**
(2) J^l が実対角化可能: **strongly hyp.**
(3) J^l がエルミート行列: **symmetric hyp.**

ADM形式から

Bona-Masso, ChoquetBruhat-York-Anderson,
Frittelli-Reula, Friedrich, ...

Ashtekar形式から

Iriondo-Leguizamón-Reula,
YG-Shinkai, PRL **82**(1999) 263.
YG-Shinkai, IJMP **D9**(2000) 13.

混合問題の well-posedness とは深く関連しているが、
constraint の減少効果はさほどでもない
$\rightarrow$ Shinkai-YG, CQG**17**(2000), pp.4799.

$\boldsymbol{\lambda}$-system

運動方程式の双曲性を保ちながら、
constraintのdecayを目指したsystem
原案: Brodbeck et al (JMP **40**(1999), 909) 数値実例なし

1. dynamical変数のsym. hyp.を用意
   $$\partial_t u = J u' + K$$
2. constraint $C(u) \approx 0$の発展 $\partial_t C = D C' + E C$
3. 変数λを導入:初期値は$\lambda = 0$で発展は
   $$\partial_t \lambda = \alpha C - \beta \lambda \ (\alpha \neq 0, \beta > 0)$$
4. ここで$\partial_t u$にλ'の補正を行いsym. hyp. λ-system
   $$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & {}^t\bar{F} \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}' + K \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$
5. constraintの発展も補正されている
   $$\partial_t C = D C' + E C + G \lambda'' + H \lambda'$$
6. フーリエ変換後, $\hat{\lambda}$と$\hat{C}$の時間発展
   $$\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ -Gkk + iHk & iDk + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{C} \end{pmatrix}$$
   線形化後、固有値の実部が負になるように。

MaxwellとEinstein(Ashtekar)で固有値解析、数値実証
$\rightarrow$ Shinkai-YG, PRD **60** (1999), 101502.
YG-Shinkai, CQG **18**(2001), 441.
もとの運動方程式がsym hypであることが必要、発展させる変数の数が増加$\rightarrow$ やや敷居が高い。

adjusted system

system構築の概要

1. dynamical変数の発展方程式
   $\partial_t u = J u' + K$
2. constraint $C(u) \approx 0$の発展をconstraintで書く
   $\partial_t C = D C' + E C$
3. dynamical変数の発展方程式右辺を，constraintやその微分で補正
   $\partial_t u = J u' + K + \kappa_1 C + \kappa_2 C'$
4. constraintの発展も補正されている
   $\partial_t C = F C'' + G C' + H C$
5. フーリエ変換後，線形化して，固有値を求める
   $\rightarrow$ "**amplification factor**"
   この実部が負になるようにκ_1,κ_2を選べば，
   constraintはdecayしていく。

MaxwellとAshtekarをベースに、system構築、固有値解析、数値実証 YG-Shinkai, CQG 18(2001), 441.

ADMにadjusted system

$$\partial_t\gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i\beta_j + \nabla_j\beta_i$$
$$\underbrace{+P_{ij}\mathcal{H} + Q^k{}_{ij}\mathcal{M}_k + p^k{}_{ij}(D_k\mathcal{H}) + q^{kl}{}_{ij}(D_k\mathcal{M}_l)}_{\text{adjusted term}}$$

$$\partial_t K_{ij} = \alpha R^{(3)}_{ij} + \alpha K K_{ij} - 2\alpha K_{ik}K^k{}_j - \nabla_i\nabla_j\alpha$$
$$+(\nabla_i\beta^k)K_{kj} + (\nabla_j\beta^k)K_{ki} + \beta^k\nabla_k K_{ij}$$
$$\underbrace{+R_{ij}\mathcal{H} + S^k{}_{ij}\mathcal{M}_k + r^k{}_{ij}(D_k\mathcal{H}) + s^{kl}{}_{ij}(D_k\mathcal{M}_l)}_{\text{adjusted term}}$$

$\boxed{\text{system 0}}$ (no adjust)

$$\begin{aligned}
\partial_t\mathcal{H} &= \beta^j(\partial_j\mathcal{H}) - 2\alpha\gamma^{ij}(\partial_i\mathcal{M}_j) + 2\alpha K\mathcal{H} \\
&\quad +\alpha(\partial_l\gamma_{mk})(2\gamma^{ml}\gamma^{kj} - \gamma^{mk}\gamma^{lj})\mathcal{M}_j \\
&\quad -4\gamma^{ij}(\partial_j\alpha)\mathcal{M}_i, \\
\partial_t\mathcal{M}_i &= -(1/2)\alpha(\partial_i\mathcal{H}) + \beta^j(\partial_j\mathcal{M}_i) + \alpha K\mathcal{M}_i \\
&\quad -(\partial_i\alpha)\mathcal{H} - \beta^k\gamma^{jl}(\partial_i\gamma_{lk})\mathcal{M}_j \\
&\quad +(\partial_i\beta_k)\gamma^{kj}\mathcal{M}_j.
\end{aligned}$$

strongly hyp

Amplification Factor $= (0, 0, \pm\sqrt{-k^2})$

$\boxed{\text{system I}}$

adjust term to $\partial_t K_{ij}$

$$= \kappa_1 \alpha \gamma_{ij} \mathcal{H} + \kappa_2 \beta^k \gamma_{ij} \mathcal{M}_k$$

$(\kappa_1, \kappa_2) = (0, 0)$ でstandard ADM

$(\kappa_1, \kappa_2) = (-1/4, 0)$ でoriginal ADM

Amplification Factor $= (0, 0, \pm\sqrt{-k^2(1+4\kappa_1)})$

constraint propagationの双曲性

- sym hyp : $\kappa_1 = 3/2$ and $\kappa_2 = 0$,
- strongly hyp : $\alpha^2 \gamma^{ll}(1+4\kappa_1) + \kappa_2^2(\beta^l)^2 > 0$, $\kappa_1 \neq -1/4$,
- weakly hyp: $\alpha^2 \gamma^{ll}(1+4\kappa_1) + \kappa_2^2(\beta^l)^2 \geq 0$.

standard ADMでは

Amplification Factor $= (0, 0, 虚, 虚)$ でstrong hyp.

original ADMでは

Amplification Factor $= (0, 0, 0, 0)$ でweakly hyp.

$\boxed{\text{system II}}$ (Detweiler, PRD **35**(1987),1095)

adjust term to $\partial_t \gamma_{ij} = -L\alpha^3 \gamma_{ij} \mathcal{H}$

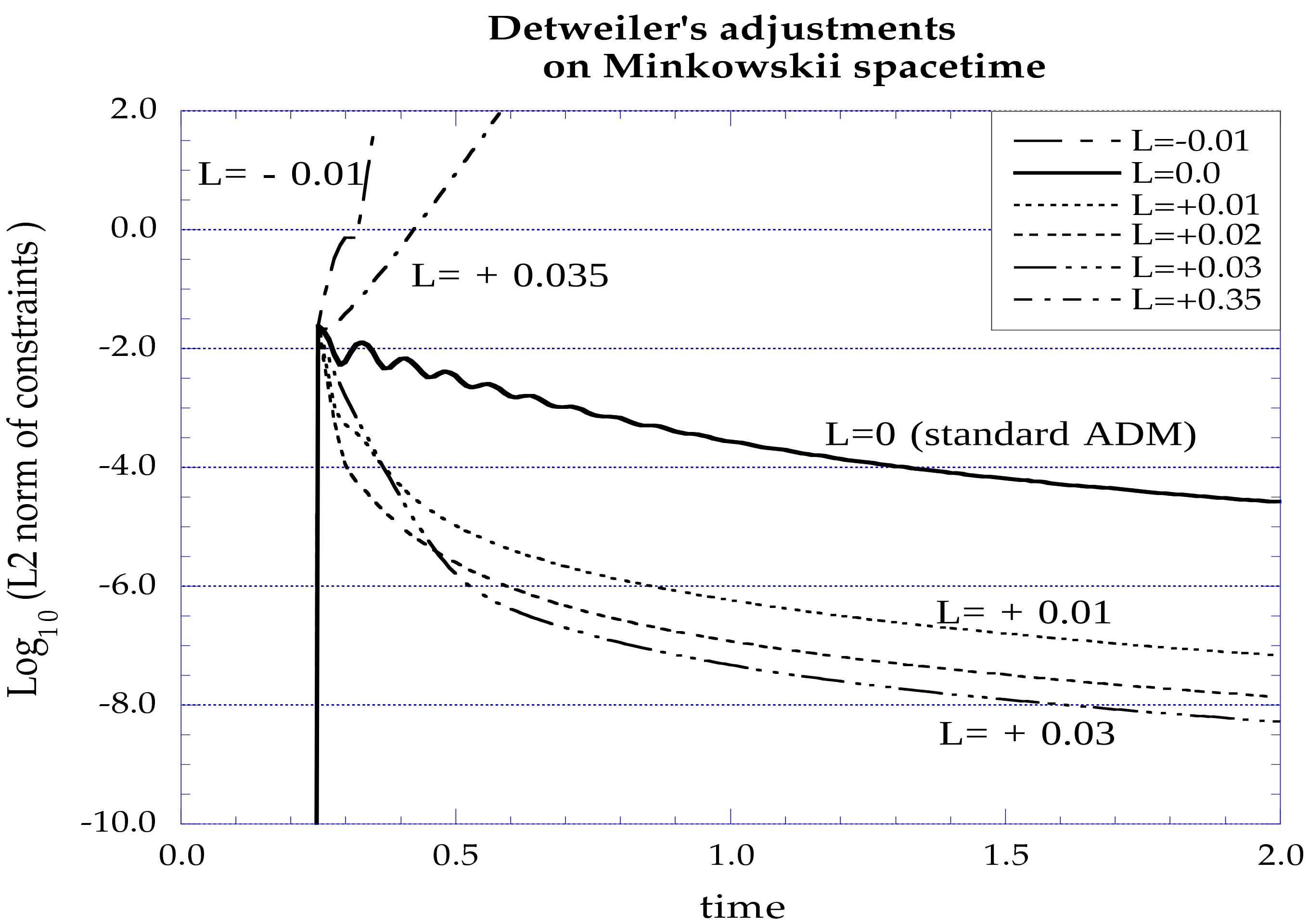
adjust term to $\partial_t K_{ij}$

$$= +L\alpha^3 (K_{ij} - (1/3)K\gamma_{ij})\mathcal{H}$$
$$+L\alpha^2 [3(\partial_{(i}\alpha)\delta^k_{j)} - (\partial_l \alpha)\gamma_{ij}\gamma^{kl}]\mathcal{M}_k$$
$$+L\alpha^3 [\delta^k_{(i}\delta^l_{j)} - (1/3)\gamma_{ij}\gamma^{kl}](D_k \mathcal{M}_l)$$

Amplification Factor

$$= (-(L/2)k^2, -(L/2)k^2,$$
$$-(4L/3)k^2 \pm \sqrt{k^2(-1 + (4/9)L^2k^2)}).$$

$L > 0 \rightarrow$ Amplification Factor $= (-,-,-,-)$



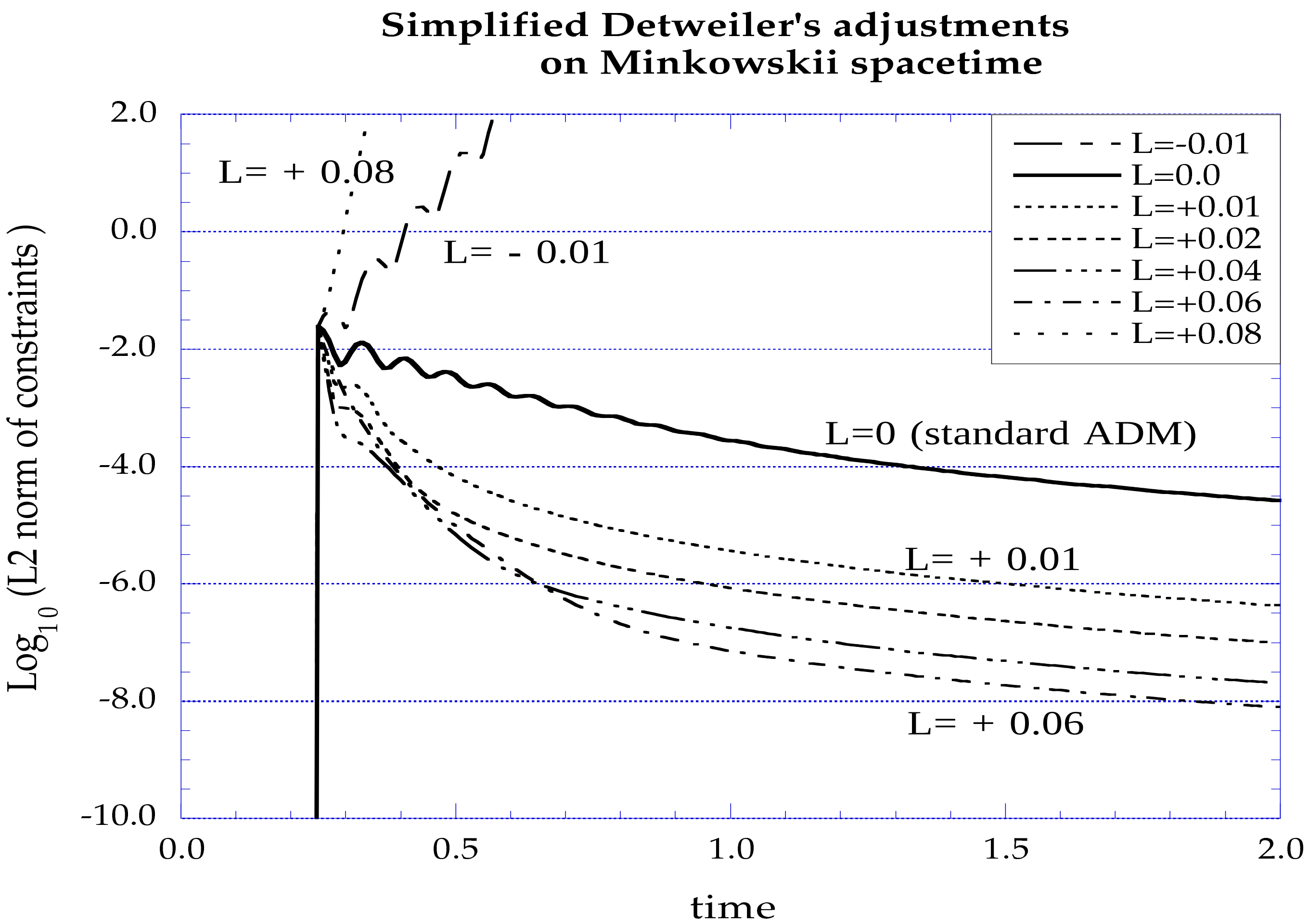
$\boxed{\text{system III}}$

adjust term to $\partial_t \gamma_{ij} = -L\alpha\gamma_{ij}\mathcal{H}$

Amplification Factor

$$= (0, 0, -Lk^2 \pm \sqrt{k^2(-1 + L^2k^2)})$$

$L > 0 \rightarrow$ Amplification Factor $= (0, 0, -, -)$



CT-ADM

Shibata and Nakamura, PRD **52**(1995), 5428.
Baumgarte and Shapiro, PRD **59**(1999), 024007.

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_{ij} &= e^{-4\phi}\gamma_{ij} \quad (\det\tilde{\gamma}_{ij} = 1) \\
\tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi}(K_{ij} - (1/3)\gamma_{ij}K), \\
\tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\Gamma}^i_{jk}\tilde{\gamma}^{jk}, \\
\mathcal{G}^i &= \tilde{\Gamma}^i + \partial_j\tilde{\gamma}^{ji} \text{ additional constraint}
\end{aligned}$$

発展方程式

$$\begin{aligned}
&(dt/d)\phi = (-1/6)\alpha K, \\
&(dt/d)\tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha\tilde{A}_{ij}, \\
&(dt/d)K \\
&\quad = \alpha(1-\kappa_1)R^{(3)} + \alpha(1-\kappa_1)K^2 + \alpha\kappa_1\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} \\
&\qquad + (1/3)\alpha\kappa_1 K^2 - \gamma^{ij}(\nabla_i\nabla_j\alpha), \\
&(dt/d)\tilde{A}_{ij} \\
&\quad = -e^{-4\phi}(\nabla_i\nabla_j\alpha)^{TF} + e^{-4\phi}\alpha R^{(3)}_{ij} \\
&\qquad - e^{-4\phi}\alpha(1/3)\gamma_{ij}(1-\kappa_3)R^{(3)} + \alpha(K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k{}_j) \\
&\qquad + e^{-4\phi}\alpha(1/3)\gamma_{ij}\kappa_3[-\tilde{A}_{kl}\tilde{A}^{kl} + (2/3)K^2], \\
&\partial_t\tilde{\Gamma}^i \\
&\quad = -2(\partial_j\alpha)\tilde{A}^{ij} - (4/3)\kappa_2\alpha(\partial_j K)\tilde{\gamma}^{ij} + 12\kappa_2\alpha\tilde{A}^{ji}(\partial_j\phi) \\
&\qquad - 2\alpha\tilde{A}_k{}^j(\partial_j\tilde{\gamma}^{ik}) - 2\kappa_2\alpha\tilde{\Gamma}^k{}_{lj}\tilde{A}^j{}_k\tilde{\gamma}^{il} \\
&\qquad - 2(1-\kappa_2)\alpha(\partial_j\tilde{A}_{kl})\tilde{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}^{jl} + 2\alpha(1-\kappa_2)\tilde{A}^i{}_j\tilde{\Gamma}^j \\
&\qquad - \partial_j\left(\beta^k\partial_k\tilde{\gamma}^{ij} - \tilde{\gamma}^{kj}(\partial_k\beta^i) - \tilde{\gamma}^{ki}(\partial_k\beta^j) + (2/3)\tilde{\gamma}^{ij}(\partial_k\beta^k)\right)
\end{aligned}$$

standard ADM : $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (0, 0, 0)$

Baumgarte and Shapiro : $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (1, 1, 0)$

Constraint propagation

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \mathcal{H} \\
&= \beta^j(\partial_j \mathcal{H}) - 2\alpha e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ij}(\partial_i \mathcal{M}_j) + 2\alpha K \mathcal{H} \\
&\quad -2\alpha e^{-4\phi}(\partial_i \tilde{\gamma}^{ij})\mathcal{M}_j - 4\alpha e^{-4\phi}(\partial_i \phi)\tilde{\gamma}^{ij}\mathcal{M}_j \\
&\quad -4e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{ij}(\partial_j \alpha)\mathcal{M}_i + 2\kappa_2 e^{-4\phi}(\partial_i \alpha)\tilde{\gamma}^{ij}\mathcal{M}_j \\
&\quad +2\kappa_2 e^{-4\phi}\alpha(\partial_i \tilde{\gamma}^{ij})\mathcal{M}_j + 2\kappa_2 e^{-4\phi}\alpha\tilde{\gamma}^{ij}(\partial_i \mathcal{M}_j) \\
&\quad +16\kappa_2 \alpha e^{-4\phi}(\partial_i \phi)\tilde{\gamma}^{ij}\mathcal{M}_j - (4/3)\kappa_1 \alpha K \mathcal{H}, \\
&\partial_t \mathcal{M}_i \\
&= -(1/2)\alpha(\partial_i \mathcal{H}) + \beta^j(\partial_j \mathcal{M}_i) + \alpha K \mathcal{M}_i - (\partial_i \alpha)\mathcal{H} \\
&\quad -4\beta^j(\partial_i \phi)\mathcal{M}_j + \beta^k \tilde{\gamma}^{jl}(\partial_i \tilde{\gamma}_{lk})\mathcal{M}_j + (\partial_i \beta_k)e^{-4\phi}\tilde{\gamma}^{kj}\mathcal{M}_j \\
&\quad +(1/3)(2\kappa_1 + \kappa_3)(\partial_i \alpha)\mathcal{H} + (1/3)(2\kappa_1 + \kappa_3)\alpha(\partial_i \mathcal{H}) \\
&\quad -2\kappa_2 \alpha \tilde{A}^j{}_i \mathcal{M}_j - (1/3)\kappa_3 \alpha \mathcal{G}^j \tilde{\gamma}_{ji}\mathcal{H} + 2\kappa_3 \alpha(\partial_i \phi)\mathcal{H}, \\
&\partial_t \mathcal{G}^i = 2\tilde{A}^i{}_j \mathcal{G}^j + 2\kappa_2 \alpha \tilde{\gamma}^{ij}\mathcal{M}_j.
\end{aligned}
$$

weakly hyperbolic

$$\Leftrightarrow (1-\kappa_2)(1-(4/3)\kappa_1-(2/3)\kappa_3) \geq 0,$$

strongly hyperbolic

$$\Leftrightarrow (1-\kappa_2) = (1-(4/3)\kappa_1-(2/3)\kappa_3) = 0,$$

or $(1-\kappa_2)(1-(4/3)\kappa_1-(2/3)\kappa_3) > 0,$

symmetric hyperbolic

$$\Leftrightarrow (-1+\kappa_2) = (1-(4/3)\kappa_1-(2/3)\kappa_3).$$

Amplification Factor

$$= (0,0,0,0,0, \pm\sqrt{-k^2(1-\kappa_2)(1-(4/3)\kappa_1-(2/3)\kappa_3)})$$

standard ADM : $(0,0,0,0,0,\pm\sqrt{-k^2})$, strongly hyp

Baumgarte and Shapiro : $(0,0,0,0,0,0,0)$, weakly hyp

Our criteria vs Detweiler's criteria

Detweiler, PRD $\mathbf{35}$(1987),1095では、constraint L2 normの単調減少性を目指している

Detweiler's criteria

$\Leftrightarrow\ \partial_t \int C_\rho C^\rho \, dV < 0 \ \ \forall$ non zero C_ρ

$\Leftrightarrow\ \partial_t \int \hat{C}_\rho \hat{C}^\rho \, dV < 0 \ \ \forall$ non zero $\hat{C}_\rho$

$\Leftrightarrow\ \int (A^{\rho\sigma} + \bar{A}^{\sigma\rho} + \partial_t \bar{G}^{\rho\sigma}) \hat{C}_\rho \bar{\hat{C}}_\sigma \, dV < 0$

$\forall$ non zero $\hat{C}_\rho$ where $\partial_t \hat{C}_\rho = A_\rho{}^\sigma \hat{C}_\sigma$

$\Leftrightarrow$ eigenvalues of $(A + A^\dagger)$ are all negative $\forall k$

(when static backgroud)

$\Rightarrow$ eigenvalues of A are all negative $\forall k$

$\Leftrightarrow$ Our criteria

example

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{where } |a| \geq \sqrt{2}$$

出来たこと

- 運動方程式右辺をconstraintでadjustしながら、Amplification Factor を負にすることで、asymptotically constrainedになる、という提案した。
- ADMをadjustしながら、双曲性解析、Amplification Factor を求めた。
- Maxwell,Ashtekarでの実証に加えて、ADMを基に Amplification Factor $= (0, 0, -, -)$ となるsystem, Amplification Factor $= (-, -, -, -)$ となるsystemを作り、上の提案を数値実証した。
- our criteriaとDetweiler criteriaの比較

time-reversal invariant(TRI)についてコメント

Einistein eq.はTRIがあるので、Amplification Factorが正か負に偏るはずはない。adjustによって、TRIを破ってこそ、"Amplification Factorが負"が作れる。例えばsystem Iのadjust

$$\text{adjust term to } \underbrace{\partial_t}_{(-)} \underbrace{K_{ij}}_{(-)} = \kappa_1 \underbrace{\alpha}_{(+)} \underbrace{\gamma_{ij}}_{(+)} \underbrace{\mathcal{H}}_{(+)}$$

はTRIを保っている。(Amplification Factorはゼロのまま。)

$$\text{adjust term to } \underbrace{\partial_t}_{(-)} \underbrace{\gamma_{ij}}_{(+)} = -L \underbrace{\alpha}_{(+)} \underbrace{\gamma_{ij}}_{(+)} \underbrace{\mathcal{H}}_{(+)}$$

で、TRIを破っている。(だから"Amplification Factorが負"が作れた。) CT-ADMの補正もTRIを保っていた。