

Hyperbolic systems of Einstein equation: asymptotically constrained system

米田元 (早大理工)

<http://faculty.web.waseda.ac.jp/yoneda>

- Phys.Rev.Lett. 82 (1999) 263.
- Phys.Rev.D 60 (1999) 101502.
- Int.J.Mod.Phys.D 9 (2000) No.1.
- Hyperbolic formulations and numerical relativity : Experiments using Ashtekar's connection variables, gr-qc/0005003.
- Hyperbolic formulations and numerical relativity II: Asymptotically constrained system of the Einstein equation, gr-qc/0007034.

with H.SHINKAI (Penn State Univ.)

目的

Einstein equation に関しての

1. **hyperbolic reduction**
2. 初期値問題，初期境界値問題の
well-posedness
3. 数値相対論の
stability, accuracy

なぜ難しいか？

- 準線型連立
- 時間軸の未決定（ゲージの自由度）
- 束縛条件

Einstein eq. の hyperbolic reduction

双曲型運動方程式

$$\partial_t u_\alpha = J^{l\beta}{}_\alpha(u) \partial_l u_\beta + K_\alpha(u)$$

(I). J^l の固有値が全部実: weakly hyp.

(II). J^l が実対角化可能: strongly hyp.

(III). J^l がエルミート行列: symmetric hyp.

Einstein eq. $R_{\mu\nu} = 0$

ADM 形式から

Bona-Masso, Choquet-Bruhat-York-Anderson,
Frittelli-Reula, Friedrich,

Ashtekar 形式から

Yoneda-Shinkai, Iriando-Leguizamón-Reula

hyperbolic system	Eqs of motion	reality condition	gauge conditions required
Ia	original	metric	-
Ib	original	triad	$\mathcal{A}_0^a = \mathcal{A}_i^a N^i, \partial_i N = 0$
IIa	original	metric	$N^l \neq 0, \pm N \sqrt{\gamma^{ll}}$
IIb	modified	metric	$\mathcal{A}_0^a = \mathcal{A}_i^a N^i$
$IIIa$	modified	triad	$\mathcal{A}_0^a = \mathcal{A}_i^a N^i, \partial_i N = 0$

Λ -system

system 構築の概要 (Brodbeck)

1. dynamical 変数の symmetric hyp. を用意

$$\partial_t u = Ju' + K$$

2. constraint $C(u) \approx 0$ の発展を constraint で書く

$$\partial_t C = DC' + EC$$

3. 変数 λ を導入: 初期値は $\lambda = 0$ で発展は

$$\partial_t \lambda = \alpha C \Leftrightarrow \beta \lambda \quad (\alpha \neq 0, \beta > 0)$$

4. ここで $\partial_t u$ に λ' の補正を行い sym. hyp. λ -system

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & {}^t \bar{F} \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}' + K \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}$$

5. constraint の発展も補正されている

$$\partial_t C = DC' + EC + G\lambda'' + H\lambda'$$

6. フーリエ変換後, $\hat{\lambda}$ と $\hat{C}$ の時間発展

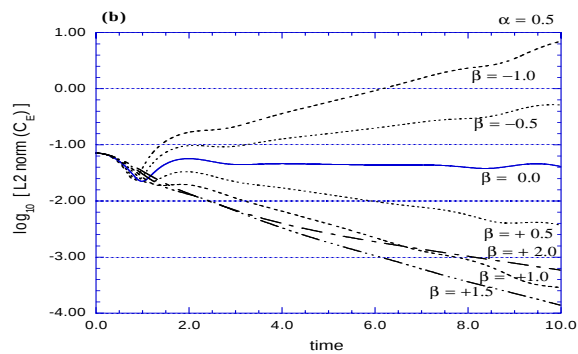
$$\partial_t \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow \beta & \alpha \\ \Leftrightarrow Gkk + iHk & iDk + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{C} \end{pmatrix}$$

線形化して, 右辺の行列を定数化。

この定数行列の固有値が実部が負 ($\Leftrightarrow \Lambda$) になるように α, β を選べば, 変数系 $(\hat{\lambda}, \hat{C})$ は asymptotic に $\exp(\Leftrightarrow \Lambda t)$ として振る舞う

Maxwell eq. に Λ -system を適用

- constraint
 $C_E := \text{div} \vec{E} \approx 0, C_B := \text{div} \vec{B} \approx 0$
- Λ hyperbolic system dynamical equation
 $\partial_t \vec{E} = +c \text{rot} \vec{B} + \text{grad} \lambda_E$
 $\partial_t \vec{B} = \mp c \text{rot} \vec{E} + \text{grad} \lambda_B$
 $\partial_t \lambda_E = \alpha_1 C_E \Leftrightarrow \beta_1 \lambda_E$
 $\partial_t \lambda_B = \alpha_2 C_B \Leftrightarrow \beta_2 \lambda_B$
- eigenvalues of constraint evolution
 $\Lambda = (\mp \beta_i \pm \sqrt{\beta_i^2 \mp 4\alpha_i k})/2$
 $\Lambda < 0 \Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2 \neq 0 \text{ and } \beta_1, \beta_2 > 0$
- 2次元電磁波伝播での数値計算結果



Einstein eq. に Λ -system を適用

- constraint

$$\mathcal{C}_H := (i/2)\epsilon^{ab}{}_c \tilde{E}_a^i \tilde{E}_b^j F_{ij}^c \Leftrightarrow \Lambda \det \tilde{E} \approx 0$$

$$\mathcal{C}_{Mi} := \Leftrightarrow F_{ij}^a \tilde{E}_a^j \approx 0, \quad \mathcal{C}_{Ga} = \mathcal{D}_i \tilde{E}_a^i \approx 0$$

- Λ hyperbolic system dynamical equation

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{E}_a^i &= \Leftrightarrow i \mathcal{D}_j (\epsilon^{cb}{}_a \tilde{N} \tilde{E}_c^j \tilde{E}_b^i) + 2 \mathcal{D}_j (N^{[j} \tilde{E}_a^{i]}) \\ &\quad + i \mathcal{A}_0^b \epsilon_{ab}{}^c \tilde{E}_c^i \\ &\quad + N^i \mathcal{C}_{Ga} + i \tilde{N} \epsilon^{abc} \tilde{E}_c^i \mathcal{C}_{Gb} \\ &\quad + \bar{\alpha}_3 \gamma^{il} (\partial_l \lambda_a) \end{aligned}$$

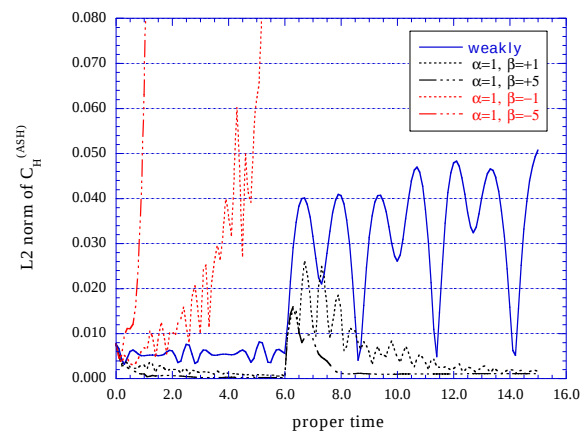
$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{A}_i^a &= \Leftrightarrow i \epsilon^{ab}{}_c \tilde{N} \tilde{E}_b^j F_{ij}^c + N^j F_{ji}^a + \mathcal{D}_i \mathcal{A}_0^a + \Lambda \tilde{N} \tilde{E}_i^a \\ &\quad + e^{-2} \tilde{N} \tilde{E}_i^a \mathcal{C}_H + i e^{-2} \tilde{N} \epsilon^{acd} \tilde{E}_d^i \tilde{E}_c^l \mathcal{C}_{Mj} \\ &\quad + i \bar{\alpha}_1 \epsilon^a{}_c{}^d \tilde{E}_i^c \tilde{E}_d^l (\partial_l \lambda) \\ &\quad + \bar{\alpha}_2 e (\tilde{E}^{la} \partial_l \lambda_i \Leftrightarrow \gamma^{ml} \tilde{E}_i^a \partial_l \lambda_m) \end{aligned}$$

- eigenvalues of constraint evolution

$(\mathcal{C}_H, \mathcal{C}_{Mi}, \mathcal{C}_{Ga}, \lambda, \lambda_i, \lambda_a)$ の時間発展に対しての固有値。複雑なので数値的に固有値負の十分条件を調べた。

$$\Lambda < 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ and } \beta > 0$$

- 平面重力波伝播での数値計算結果



adjusted system

system 構築の概要

1. dynamical 変数の発展方程式

$$\partial_t u = Ju' + K$$

2. constraint $C(u) \approx 0$ の発展を constraint で書く

$$\partial_t C = DC' + EC$$

3. dynamical 変数の発展方程式右边を , constraint やその微分で補正

$$\partial_t u = Ju' + K + \kappa_1 C + \kappa_2 C'$$

4. constraint の発展も補正されている

$$\partial_t C = FC'' + GC' + HC$$

5. フーリエ変換後 , 線形化して , constraint evolution の固有値を求める。

固有値の実部が負になるように κ_1, κ_2 を選べば , constraint は decay していく。

Maxwell eq. に adjusted system

- evolution for dynamical value

$$\begin{aligned}\partial_t E_i &= c\epsilon_i^{jk}\partial_j B_k \\ &+ P_i C_E + p^j{}_i(\partial_j C_E) + Q_i C_B + q^j{}_i(\partial_j C_B) \\ \partial_t B_i &= \epsilon_i^{jk}\partial_j E_k \\ &+ R_i C_E + r^j{}_i(\partial_j C_E) + S_i C_B + s^j{}_i(\partial_j C_B)\end{aligned}$$

- eigenvalues of constraint evolution

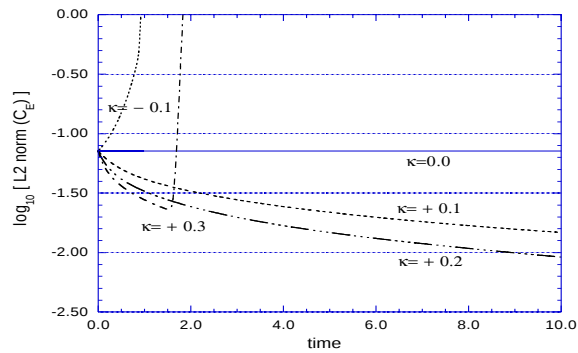
$$\Lambda = \frac{p+s \pm \sqrt{p^2 + 4qr - 2ps + s^2}}{2}$$

where $p := iP^i k_i - k_i k_j p^j{}_i$, $q := iQ^i k_i - k_i k_j q^j{}_i$,
 $r := iR^i k_i - k_i k_j r^j{}_i$, $s := iS^i k_i - k_i k_j s^j{}_i$.

例えば $\kappa = p^j{}_i = s^j{}_i$ で other = 0 とすると

$$\Lambda < 0 \Leftrightarrow \kappa > 0$$

- 2次元電磁波伝播での数値計算結果



Einstein eq. に adjusted system

- evolution for dynamical value

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{E}_a^i &= \Leftrightarrow i \mathcal{D}_j (\epsilon^{cb}{}_a \tilde{N} \tilde{E}_c^j \tilde{E}_b^i) + 2 \mathcal{D}_j (N^{[j} \tilde{E}_a^{i]}) \\
 &\quad + i \mathcal{A}_0^b \epsilon_{ab}{}^c \tilde{E}_c^i \\
 &\quad + X_a^i \mathcal{C}_H + Y_a^{ij} \mathcal{C}_{Mj} + P_a^{ib} \mathcal{C}_{Gb} \\
 &\quad + T^i{}_{ajk} \mathfrak{S}m(\tilde{E}_b^j \tilde{E}_b^k), \\
 \partial_t \mathcal{A}_i^a &= \Leftrightarrow i \epsilon^{ab}{}_c \tilde{N} \tilde{E}_b^j F_{ij}^c + N^j F_{ji}^a \\
 &\quad + \mathcal{D}_i \mathcal{A}_0^a + \Lambda \tilde{N} \tilde{E}_i^a \\
 &\quad + Q_i^a \mathcal{C}_H + R_i^{aj} \mathcal{C}_{Mj} + Z_i^{ab} \mathcal{C}_{Gb} \\
 &\quad + V^a{}_{ijk} \mathfrak{S}m(\tilde{E}_b^j \tilde{E}_b^k),
 \end{aligned}$$

- eigenvalues of constraint evolution
 一般には複雑。 $T^i{}_{ajk} = \Leftrightarrow i \kappa \delta_j^i \delta_{ak}$, other = 0 として ,
 実数条件の制御だけに適用すると
 $\Lambda < 0 \Leftrightarrow \kappa > 0$

- degenerate passing での数値計算結果

